Universidad Simón Bolívar.
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas.
MATEMÁTICAS I (MA-1111)
Primer Parcial (40 %)

Nombre:______________________________

Carnet:________________ Sección:______

Examen TIPO: A

Justifique todas sus respuestas.

1. Resolver: $|x-3|+|x-5|\leq 4$

$|x-3|=\begin{cases} x-3 & x\geq 3\\ -x+3 & x<3\end{cases}$; $|x-5|=\begin{cases} x-5 & x\geq 5\\ -x+5 & x<5\end{cases}$

Estudiamos los casos:

a) Si $x\in(-\infty,3)$

$$\begin{array}{rcl} -x+3-x+5 & \leq & 4\\ -2x+8 & \leq & 4\\ -2x & \leq & -4\\ x & \geq & 2\end{array} \Rightarrow \begin{array}{rcl} x & \in & [2,\infty)\cap(-\infty,3)=[2,3)\\ x & \in & [2,3).\end{array}$$

b) Si $x\in[3,5)$

$$\begin{array}{rcl} x-3-x+5 & \leq & 4\\ 2 & \leq & 4\\ x & \in & \mathbb{R}\end{array} \Rightarrow x\in\mathbb{R}\cap[3,5)=[3,5)$$ (1 pto.)

c) Si $x\in[5,\infty)$

$$\begin{array}{rcl} x-3+x-5 & \leq & 4\\ 2x-8 & \leq & 4\\ 2x & \leq & 12\\ x & \leq & 6.\\ x & \in & (-\infty,6]\end{array} \qquad \Rightarrow x\in[5,\infty)\cap(-\infty,6]=[5,6].$$

Solución de la inecuación: $x\in[2,3)\cup[3,5)\cup[5,6]=[2,6]\Rightarrow x\in[2,6]$

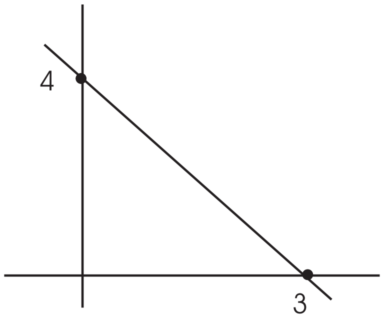
2. Sea L la recta que pasa por $A=(6,-4)$ perpendicular a $4x-3x-8=0$.

a) Cálculo de L :

Si $4y-3x-8=0\Rightarrow y=\dfrac{3}{4}x+2\Rightarrow m_1=3/4$ es la pendiente.
La pendiente de L es $m_2=-4/3$.
Como pasa por $A=(6,-4)$ su ecuación es:

$$\begin{array}{rcl} y+4 & = & -\frac{4}{3}(x-6)\\ 3y+12 & = & -4x+24\\ 3y & = & -4x+12\\ y & = & -\frac{4}{3}x+4\end{array}$$ (2 ptos.)

Gráfica de L :



$$
\begin{aligned}
-\frac{4}{5}x + 4 &= 0 \\
\frac{4x}{3} &= -4 \qquad \text{(1 pto.)} \\
x &= 3
\end{aligned}
$$

b) Ecuación de la circunferencia: El punto medio entre $(0,4)$ y $(3,0)$ es $M = \left(\frac{3}{2}, 2\right)$.

El radio de la circunferencia es:

$$
r^2 = d^2(M,P) = \left(\frac{3}{2}\right)^2 + (4-2)^2 \quad \Rightarrow \quad r^2 = \frac{9}{4} + 4 \quad \text{(2 ptos.)}
$$

$$
r^2 = 25/4
$$

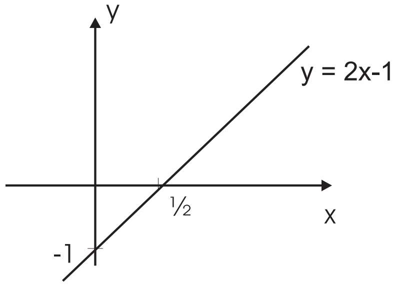
$$
r = 5/2
$$

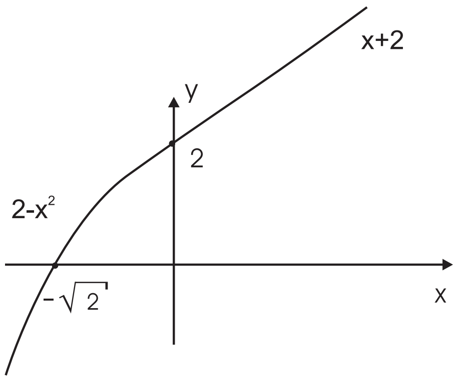
La ecuación de la circunferencia es: $(x-3/2)^2+(y-2)^2 = 25/4$ (2ptos)

3. Sean $f(x) = 2x - 1$

$$
g(x) = \begin{cases} 2 - x^2 & x < 0 \\ x + 2 & x \geq 0 \end{cases}
$$

a)





b)
Dominio f $=$ Dominio$g$ $= \mathbb{R}$
Rango f $=$ Rango g $= \mathbb{R}$.

c) $g(f(x)) = \begin{cases} 2 - f^2(x) & f(x) < 0 \\ f(x) + 2 & f(x) \geq 0 \end{cases}$

$f(x) \geq 0$ si $2x - 1 \geq 0$ asi $x \geq 1/2$

En este caso $g(f(x)) = f(x) + 2 = 2x - 1 + 2 = 2x + 1$.

Análogamente $f(x) < 0$ si $x < 1/2$ y en este caso,

$g(f(x)) = 2 - f^2(x) = 2 - (2x-1)^2 = 2 - (4x^2 - 4x + 1)$.

Entonces $g(f(x)) = \begin{cases} -4x^2+4x+1 & x<1/2 \\ 2x+1 & x \geq 1/2. \end{cases}$

d)

$$\begin{array}{rclclcl} g(g(f(1))) & = & g(3) & = & 3+2 & = & 5 \\ f(g(f(1))) & = & f(-7) & = & -14-1 & = & -15. \end{array}$$

4. Sea $f(x) = \dfrac{x}{x-1}$

a) Veamos que f es inyectiva:

Supongamos $f(a) = f(b) \Rightarrow \dfrac{a}{a-1} = \dfrac{b}{b-1}$

$$\begin{array}{rcl} \Rightarrow a(b-1) = b(a-1) & & \\ ab-a & = & ba-b \\ -a & = & -b \\ a & = & b \end{array}$$

Luego $f(a) = f(b)$ implica $a=b$

b) Cálculo de $f^{-1:}$

$$y = \frac{x}{x-1} \Rightarrow \begin{array}{rcl} y(x-1)-x & = & 0 \\ x(y-1) & = & y \\ x & = & \dfrac{y}{y-1} \end{array} \Rightarrow f^{-1}(y) = \frac{y}{y-1}.$$

c) Evaluar:

- $\dfrac{1}{f^{-1}(2\pi)} = \dfrac{2\pi-1}{2\pi}$
- $f(f^{-1}(1))$ no existe, porque en $x=1$ f^{-1} no está definida.

d) $f\left(\dfrac{1}{f(x)}\right) = \dfrac{\frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)}-1} = \dfrac{\frac{x-1}{x}}{\frac{x-1}{x}-1} = \dfrac{\frac{x-1}{x}}{\frac{x-1-x}{x}} = \dfrac{x-1}{-1}$

$f\left(\dfrac{1}{f(x)}\right) = -x+1$